2023 年 6 月国子学

1. 设 G 是一个非空集合（未必是有限集），其上定义的运算

$$\begin{aligned} *: \ G \times G &\longrightarrow G \\ (a,b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

满足以下性质：

(i) 对任何 $a, b, c \in G$, 有 $(a * b) * c = a * (b * c)$;

(ii) 对任何 $a, b \in G$, 存在 $x \in G$ 使得 $a * x = b$;

(iii) 对任何 $a, b \in G$, 存在 $x \in G$ 使得 $x * a = b$.

求证：$(G, *)$ 是一个群。

证明. 条件 (i) 说明运算 $*$ 满足结合律。

任取 $a_0 \in G$. 由条件 (ii), 存在 $e_1 \in G$ 使得 $a_0 * e_1 = a_0$. 对任何 $g \in G$, 由条件 (iii), 存在 $x \in G$ 使得 $x * a_0 = g$, 于是 $g * e_1 = (x * a_0) * e_1 = x * (a_0 * e_1) = x * a_0 = g$. 以上证明了

$$g * e_1 = g, \quad \forall g \in G. \tag{1}$$

由条件 (iii), 存在 $e_2 \in G$ 使得 $e_2 * a_0 = a_0$. 对任何 $g \in G$, 由条件 (ii), 存在 $x \in G$ 使得 $a_0 * x = g$, 于是 $e_2 * g = e_2 * (a_0 * x) = (e_2 * a_0) * x = a_0 * x = g$. 以上证明了

$$e_2 * g = g, \quad \forall g \in G. \tag{2}$$

由 (1)(2) 得 $e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. 我们将 e_1, e_2 统一记作 e, 则 $g * e = e * g = g, \forall g \in G$. 故 G 中存在单位元素。

对任何 $g \in G$, 由条件 (ii), 存在 $g_1 \in G$ 使得 $g * g_1 = e$. 由条件 (ii), 存在 $g_2 \in G$ 使得 $g_1 * g_2 = e$. 于是 $g = g * (g_1 * g_2) = (g * g_1) * g_2 = g_2$. 以上证明了，对任何 $g \in G$, 存在 $g_1 \in G$ 使得 $g * g_1 = g_1 * g = e$. 故 G 中每个元素均存在逆元。

综上，G 是一个群。 $\square$

2. 记 γ 为 Euler–Mascheroni 常数，它定义为

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right).$$

（上式右端极限的存在性是已知的，解答中无需证明此点。）对于实数 y, 我们记 $\lfloor y \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant y\}$ 为 y 的整数部分，记 $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ 为 y 的小数部分。求证：

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}\mathrm{d}x = 2\gamma - 1.$$

证明. 记待证式子左端为 I. 作变量替换 $x = 1-y$, 我们有

$$\int_0^{\frac12} \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}\mathrm{d}x = \int_{\frac12}^{1} \left\{\frac{1}{1-y}\right\}\left\{\frac{1}{y}\right\}\mathrm{d}y,$$

于是

$$I = 2\int_0^{\frac12} \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}\mathrm{d}x.$$

在上式中作变量替换 $x = \frac{1}{t}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_2^{+\infty} \{t\}\left\{\frac{t}{1-t}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\int_k^{k+1} \{t\}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\int_k^{k+1} (t-k)\left(\frac{t}{t-1}-1\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\int_k^{k+1} \frac{t-k}{t^2(t-1)}\mathrm{d}t\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\int_k^{k+1} \left(\frac{1-k}{t-1}+\frac{k-1}{t}+\frac{k}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty}\left((k-1)\ln\frac{k+1}{k} - (k-1)\ln\frac{k}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

记部分和

$$S_n = 2\sum_{k=2}^{n}\left((k-1)\ln\frac{k+1}{k} - (k-1)\ln\frac{k}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2},$$

则直接计算知

$$\begin{aligned}
S_n &= 2\left((n-1)\ln\frac{n+1}{n} - \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 2\left((n-1)\ln\frac{n+1}{n} - \ln n + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty}(n-1)\ln\frac{n+1}{n}=1,$$

以及

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\ln n+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)=\gamma,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to+\infty}S_n\\
&=2\left(1+\gamma-1-\frac{1}{2}\right)\\
&=2\gamma-1.
\end{aligned}$$

$\square$

3. 设 n 是一个正整数，$n \geqslant 2$. 设 $A = (a_{i,j})$ 是一个 $(n-1)$ 行 n 列的矩阵，它的每个元素 $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ 均是整数。已知 A 的每一行的元素之和均为零，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

求证：存在整数 k 使得 $\det(AA^{\mathrm{T}}) = nk^2$. （注：$A^T$ 是 A 的转置，即 $A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})$.）

证明. 我们把矩阵 A 删去最后一列之后得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵记作 B. 因为 A 的每一行元素之和为零，我们可以将 A 的最后一列表示成 $B\alpha$, 其中 $\alpha = (-1, -1, \ldots, -1)^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\begin{aligned}
\det(AA^{\mathrm{T}}) &= \det\left((B, B\alpha)\begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}} \\ \alpha^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det(BB^{\mathrm{T}} + B\alpha\alpha^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}) \\
&= \det\left(B(I_{n-1} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}})B^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \det(I_{n-1} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}) \cdot (\det(B))^2.
\end{aligned}$$

注意到

$$\det(I_{n-1} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = \det\left(I_1 + \alpha^{\mathrm{T}}\alpha\right) = n,$$

记 $k = \det(B)$, 则 k 为整数且 $\det(AA^{\mathrm{T}}) = nk^2$. $\square$

4. 设 G 是一个有限群，它的单位元素为 e. 设 $T \in \mathrm{Aut}(G)$ 是 G 的一个自同构映射，且 T 的阶是 n. 已知 T 的不动点有且仅有 e（即 $T(x) = x$ 当且仅当 $x = e$）。求证：对任何 $g \in G$, 我们有

$$gT(g)T^2(g)\cdots T^{n-1}(g) = e.$$

（注：$T^k(g) = T(T^{k-1}(g))$, $g \in G$, $k = 2, 3, \ldots$.）

证明. 我们先证明以下的映射是单射（仅作为集合到集合的映射）：

$$\begin{aligned} F : G &\longrightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1}T(x). \end{aligned}$$

事实上，假设 $x^{-1}T(x) = y^{-1}T(y)$, 则我们有

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad T(x) = xy^{-1}T(y) \\ &\Rightarrow \quad T(x)T(y)^{-1} = xy^{-1} \\ &\Rightarrow \quad T(xy^{-1}) = xy^{-1}, \end{aligned}$$

于是 xy^{-1} 是 T 的不动点，由条件知 $xy^{-1} = e$, 从而 $x = y$. 故映射 F 是单射。

由于 G 是有限集，$F : G \to G$ 是单射，故 F 也必为满射。于是，对任意 $g \in G$, 存在 $x \in G$ 使得 $g = x^{-1}T(x)$. 所以我们有

$$\begin{aligned} &gT(g)T^2(g)\cdots T^{n-1}(g) \\ =&x^{-1}T(x) \cdot T(x^{-1})T^2(x) \cdot T^2(x^{-1})T^3(x) \cdots T^{n-1}(x^{-1})T^n(x) \\ =&x^{-1}T^n(x) = x^{-1}x = e. \end{aligned}$$

□

5. 设 n 是一个正整数。已知函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 有连续的 n 阶导数（即 $f\in C^n((0,+\infty))$），并且满足以下条件：

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)=0.$$

求证：对任何 $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$, 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0.$$

证明. 考虑函数 $g(x)=e^x f(x)$, 则由 $f\in C^n((0,+\infty))$ 知 $g\in C^n((0,+\infty))$. 由 Leibniz 法则，对任何 $m\in\{0,1,2,\dots,n\}$, 我们有

$$g^{(m)}(x)=e^x\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}(x).$$

特别当 $m=n$ 时，有

$$\frac{g^{(n)}(x)}{e^x}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x).$$

于是条件推出 $\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{(n)}(x)}{e^x}=0$. 根据 $\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hôpital 法则，我们得到 $\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{(n-1)}(x)}{e^x}=0$. 同样地，再继续反复应用 $\frac{*}{\infty}$ 型 L'Hôpital 法则，我们可得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{(m)}(x)}{e^x}=0,\quad m=n,n-1,n-2,\dots,0.$$

此即

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}(x)=0,\quad m=0,1,2,\dots,n.$$

于是得到

$$\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0,\quad k=0,1,2\dots,n.$$

$\square$

6. 设 n 是一个正整数。求证：

$$\min_{a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

证明. 我们记 $V=\mathbb{R}[X]_{\deg\leqslant n}$ 为所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$-线性空间。对于任何 $P,Q\in V$, 我们定义

$$\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

容易验证 V 装备 $\langle,\rangle$ 后是一个内积空间。考虑 V 中由 $X,X^2,\ldots,X^n$ 张成的线性子空间 W, 则命题可叙述为求证 $-1\in V$ 到子空间 W 的距离的平方是 $\frac{1}{n+1}$, 即求证

$$d(-1,W)^2=\inf_{P\in W}\langle 1+P,1+P\rangle=\frac{1}{n+1}.$$

设 P_0 是 $-1\in V$ 在 W 上的投影，则我们知道下确界 $d(1,W)=d(1,P_0)$ 能被取到。而 P_0 被下述性质刻画：$\langle 1+P_0,Q\rangle=0,\forall Q\in W$; 或者等价地，$\langle 1+P_0,X^k\rangle=0,\forall k=1,2,\ldots,n.$

设 $P_0(X)=c_1X+c_2X^2+\cdots+c_nX^n$. 由于

$$\int_0^{+\infty}x^ke^{-x}\mathrm{d}x=k!,\quad\forall k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

于是刻画 P_0 的条件 $\langle 1+P_0,X^k\rangle=0$ 重写为

$$k!+\sum_{i=1}^n c_i(k+i)!=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

这等价于

$$1+\sum_{i=1}^n c_i(k+1)(k+2)\cdots(k+i)=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

考虑多项式 $Q=1+\sum_{i=1}^n c_i(X+1)(X+2)\cdots(X+i)$, 则 $1,2,\ldots,n$ 是 Q 的零点。因为 $\deg Q=n$ 且 Q 的首项系数是 c_n, 故我们有

$$Q=c_n(X-1)(X-2)\cdots(X-n).$$

所以

$$d(-1,W)^2=\langle 1+P_0,1+P_0\rangle=\langle 1+P_0,1\rangle=1+\sum_{i=1}^n c_ii!=Q(0)=(-1)^nn!c_n.\tag{3}$$

在

$$Q=1+\sum_{i=1}^n c_i(X+1)(X+2)\cdots(X+i)=c_n(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$$

中代入 $X=-1$, 我们得到

$$1=(-1)^n(n+1)!c_n. \tag{4}$$

由 (3)(4) 我们便得到了

$$d(-1,W)^2=\frac{1}{n+1}.$$

□

7. 我们用 $\|x\|$ 表示实数 x 与最近的整数之间的距离，即

$$\|x\| = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x-m|.$$

对任何正实数 $\rho > 0$, 我们定义集合

$$B(\rho) = \left\{ n \in \mathbb{Z} \cap [0, 10^{10}] : \ \|n\sqrt{2}\| \leqslant \rho \text{ 且 } \|n\sqrt{3}\| \leqslant \rho \right\}.$$

对任何有限集合 S, 我们用 $|S|$ 表示集合 S 的元素个数。求证：对任何正实数 $\rho > 0$, 我们有

$$|B(2\rho)| \leqslant 16\,|B(\rho)|\,.$$

证明. 如果 $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, 则 $B(\rho) = \mathbb{Z} \cap [0, 10^{10}]$, 结论显然成立。以下我们设 $0 < \rho < \frac{1}{2}$.

注意到对任何实数 x, 如果 $\|x\| \leqslant 2\rho$, 则 x 必满足以下 4 种情况之一：

(i) $\|x - \frac{\rho}{2}\| \leqslant \frac{\rho}{2}$; 或

(ii) $\|x - \frac{3\rho}{2}\| \leqslant \frac{\rho}{2}$; 或

(iii) $\|x - (1 - \frac{\rho}{2})\| \leqslant \frac{\rho}{2}$; 或

(iv) $\|x - (1 - \frac{3\rho}{2})\| \leqslant \frac{\rho}{2}$.

记 $x_1 = \frac{\rho}{2}$, $x_2 = \frac{3\rho}{2}$, $x_3 = 1 - \frac{\rho}{2}$, $x_4 = 1 - \frac{3\rho}{2}$. 则我们有

$$B(2\rho) \subset \bigcup_{i,j\in\{1,2,3,4\}} B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right), \tag{5}$$

其中

$$B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \left\{ n \in \mathbb{Z} \cap [0, 10^{10}] : \ \|n\sqrt{2} - x_i\| \leqslant \frac{\rho}{2} \text{ 且 } \|n\sqrt{3} - x_j\| \leqslant \frac{\rho}{2} \right\}.$$

下面我们证明对于任何 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, 有

$$\left| B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right) \right| \leqslant |B(\rho)|\,. \tag{6}$$

事实上，因为对任何两个实数 x, y 我们有 $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, 于是对于任何 $n_1, n_2 \in B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right)$, 其中 $n_1 \leqslant n_2$, 我们有

$$\|(n_2 - n_1)\sqrt{2}\| \leqslant \|n_2\sqrt{2} - x_i\| + \|n_1\sqrt{2} - x_i\| \leqslant \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2},$$
$$\|(n_2 - n_1)\sqrt{3}\| \leqslant \|n_2\sqrt{3} - x_j\| + \|n_1\sqrt{3} - x_j\| \leqslant \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2},$$

并且 $0 \leqslant n_2 - n_1 \leqslant 10^{10}$. 所以我们有 $n_2 - n_1 \in B(\rho)$. 如果 $B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right)$ 为空集，则 (6) 当然成立；如果 $B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right)$ 非空，设 $B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \{n_1, n_2, \ldots, n_s\}$, 其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_s \leqslant 10^{10}$. 则

$$0 = n_1 - n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_1, \ldots, n_s - n_1$$

是 $B(\rho)$ 中的 s 个不同元素，所以 (6) 成立。

由 (5)(6), 我们得到

$$|B(2\rho)| \leqslant \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left|B_{i,j}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right| \leqslant 16\,|B(\rho)|\,.$$

$\square$

8. 设 s 是任意一个非负整数。设 $P(X,Y)\in\mathbb{C}[X,Y]_{\deg\leqslant 2s+1}$ 是任意一个总次数不超过 $2s+1$ 的二元复系数多项式。设 n 是任意一个正整数，设 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 是任意 n 个复数（允许相同）。考虑 $n\times n$ 复矩阵

$$M=(P(z_i,z_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\begin{pmatrix} P(z_1,z_1) & P(z_1,z_2) & \cdots & P(z_1,z_n)\\ P(z_2,z_1) & P(z_2,z_2) & \cdots & P(z_2,z_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P(z_n,z_1) & P(z_n,z_2) & \cdots & P(z_n,z_n)\end{pmatrix}.$$

求证：$\operatorname{rank} M\leqslant 2s+2$.

证明. 因为 $\operatorname{rank} M\leqslant n$, 我们只用考虑 $n>2s+2$ 的情况。为证明 $\operatorname{rank} M\leqslant 2s+2$, 我们只用证明 M 的任何 $2s+3$ 阶子式为零。而 M 的任何 $2s+3$ 阶子式形如

$$\begin{vmatrix} P(z_{i_1},z_{j_1}) & P(z_{i_1},z_{j_2}) & \cdots & P(z_{i_1},z_{j_{2s+3}})\\ P(z_{i_2},z_{j_1}) & P(z_{i_2},z_{j_2}) & \cdots & P(z_{i_2},z_{j_{2s+3}})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P(z_{i_{2s+3}},z_{j_1}) & P(z_{i_{2s+3}},z_{j_2}) & \cdots & P(z_{i_{2s+3}},z_{j_{2s+3}})\end{vmatrix}.$$

重新编号，我们只用证明：对任何 $2s+3$ 个复数 $z_1,z_2,\ldots,z_{2s+3}$, 有

$$\begin{vmatrix} P(z_1,z_1) & P(z_1,z_2) & \cdots & P(z_1,z_{2s+3})\\ P(z_2,z_1) & P(z_2,z_2) & \cdots & P(z_2,z_{2s+3})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P(z_{2s+3},z_1) & P(z_{2s+3},z_2) & \cdots & P(z_{2s+3},z_{2s+3})\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

如果 $z_1,z_2,\ldots,z_{2s+3}$ 中有重复的复数，则 (7) 显然成立（因为行列式中有两行相同）。下面设 $z_1,z_2,\ldots,z_{2s+3}$ 是两两不同的复数。考虑多项式

$$Q(z)=\begin{vmatrix} P(z,z_1) & P(z,z_2) & \cdots & P(z,z_{2s+3})\\ P(z_2,z_1) & P(z_2,z_2) & \cdots & P(z_2,z_{2s+3})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P(z_{2s+3},z_1) & P(z_{2s+3},z_2) & \cdots & P(z_{2s+3},z_{2s+3})\end{vmatrix},$$

上式右端除了第一行以外，其余每行和 (7) 相同。注意到 $Q(z)$ 在 $z=z_2,z_3,\ldots,z_{2s+3}$ 这 $2s+2$ 个不同复数处取值为零，而 $\deg Q\leqslant\deg P\leqslant 2s+1$, 于是必有 $Q\equiv 0$. 特别地，有 $Q(z_1)=0$. 于是 (7) 得证。原命题亦得证。

□

题 56 设 A 是一个正定的 $n\times n$ 实对称矩阵，其中正整数 $n\geqslant 2$. 已知 A 的所有特征值为 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$. 求证：

$$\lambda_2=\max_V \min_{x\in V-\{0\}}\frac{|Ax|}{|x|},$$

其中 V 取遍 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的所有二维子空间，而对于 $y\in\mathbb{R}^{(n)}$, $|y|$ 表示 y 的欧氏长度。

证明. 由于 A 是实对称矩阵，可正交相似于对角阵。对角阵上的元素为 A 的特征值。即存在正交矩阵 Ω 使得 $\Omega^{-1}A\Omega=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$. 因 A 正定，特征值均为正实数。因为正交矩阵保持欧氏长度：$|\Omega y|=|y|,\forall y\in\mathbb{R}^{(n)}$, 我们有

$$\begin{aligned}\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|Ax|}{|x|}&=\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|\Omega\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\Omega^{-1}x|}{|x|}\\&=\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\Omega^{-1}x|}{|\Omega^{-1}x|}.\end{aligned}$$

当 V 取遍 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的 2 维子空间时，$\Omega^{-1}V$ 也取遍 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的 2 维子空间。所以

$$\max_V\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|Tx|}{|x|}=\max_V\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\cdot x|}{|x|}.$$

现在设 $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的自然基（即 e_i 的第 i 个分量为 1, 其余分量为 0）。一方面，取 $V_0=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(e_1,e_2)$, 则

$$\begin{aligned}&\min_{x\in V_0-\{0\}}\frac{|\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,x|}{|x|}\\=&\min\left\{\frac{\sqrt{\lambda_1^2a_1^2+\lambda_2^2a_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\;\middle|\;0\neq(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\right\}\\=&\lambda_2,\end{aligned}$$

另一方面，设 V 是 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的任意一个 2 维子空间。我们可以取 V 的一个标准正交基 $\{f_1,f_2\}$, 并将它扩充为 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的一个标准正交基 $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$. 于是存在正交矩阵 $Q=(q_{i,j})$ 使得

$$(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}=Q\,(e_1,e_2,\cdots,e_n)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $0\neq x=a_1f_1+a_2f_2$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{|\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\cdot x|}{|x|}\\=&\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n(\lambda_1a_1q_{1k}+\lambda_2a_2q_{2k})^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\\\leqslant&\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n\lambda_1^2a_1^2q_{1k}^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n\lambda_2^2a_2^2q_{2k}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\\=&\frac{\sqrt{\lambda_1^2a_1^2}+\sqrt{\lambda_2^2a_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\in V-\{0\}}\frac{\left|\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)x\right|}{|x|}\\
\leqslant\ &\min\left\{\frac{\sqrt{\lambda_1^2a_1^2}+\sqrt{\lambda_2^2a_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\ \middle|\ 0\neq(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\right\}\leqslant\lambda_2.
\end{aligned}
$$

综上，故

$$
\max_V\min_{x\in V-\{0\}}\frac{|Ax|}{|x|}=\lambda_2.
$$

□

题 61 (1938, Pisot) 对于任何实数 x, 我们用 $\|x\|$ 表示 x 与最近的整数之间的距离，即

$$\|x\| = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x-m|.$$

设实数 $\alpha > 1$, 设 $\xi \neq 0$ 是一个非零实数，已知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\xi\alpha^n\|^2 < +\infty,$$

求证：α 是一个代数整数，并且它的所有共轭根，除了它自己以外，均落在单位开圆盘中。此外，$\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

参考文献

[1] C. Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques*. 1938.

可以在下面链接找到原文：

`http://www.numdam.org/item/?id=THESE_1938__203__1_0`