几道短文题的评讲

2025年2月15日

注: 这份讲义的电子版(及后续更新、更正)可以在下面我的个人主页上下载: (编号为5的pdf文件)

https://lilaimath.github.io/homepage/MathOlympiad.html

题 1 设 $P(X)$ 是一个 d 次首一复系数多项式, 其中 $d \geqslant 1$. 设 $M > 0$. 记集合 $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |P(x)| \leqslant M\}$. 本题目标是证明:

$$\mu(E) \leqslant 4\left(\frac{M}{2}\right)^{1/d}.$$

(这里 $\mu(E)$ 表示 E 的 Lebesgue 测度. 如果 E 是有限个两两不交的区间的并, 则 $\mu(E)$ 是这些区间的长度和.) 这是 Pólya 的一个结果. 以下的证明方法属于徐凯.

(1) 记 $a_i = \cos(i\pi/d)$, $(i = 0, 1, \ldots, d)$. 证明:

$$\sum_{i=0}^{d} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant d \\ j \neq i}} \frac{1}{|a_i - a_j|} = 2^{d-1}.$$

(提示: Chebyshev 多项式.)

(2) 记集合 E 的最大元素为 b_0. 证明: 存在 $b_i \in E$, $(i = 1, 2, \ldots, d)$ 使得

$$\frac{\mu\left(E \cap [b_i, b_0]\right)}{\mu(E)} = \frac{\mu\left([-1,1] \cap [a_i, a_0]\right)}{\mu([-1,1])}.$$

并证明: $|b_i - b_j| \geqslant \frac{\mu(E)}{2} |a_i - a_j|$ 对任意 $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ 成立.

(3) 从 $1 = \left|\sum_{i=0}^{d} P\left(b_i\right) \prod_{j \neq i} \frac{1}{b_i - b_j}\right|$ 出发完成本题目标.

评讲. 本题的关键是注意到了 Chebyshev 多项式(适当拉伸)对应到所求不等式取等的情况. 粗略地讲, Chebyshev 多项式的一个主要特点是它在区间 $[-1,1]$ 上的值在 -1 与 1 之间交替振荡, 且震荡的次数是同次数多项式里最多的. 这是 Chebyshev 多项式在区间上的多项式问题中经常成为极端情况的重要原因.

(1)小问对 Chebyshev 多项式使用 Lagrange 插值公式并比较首项系数即可. (2)小问在直观上很明显: 容易证明 E 是有限个两两不交的闭区间的并(单点集算作退化的闭区间). 直观上我们可以把这些闭区间拼接在一起变成一个大区间, 在这个大区间上按比例地取好 b_i, 再将大区间还原成原来的有限个闭区间即可. 严格(且更容易书写)的证明是利用函数 $x \mapsto \mu(E \cap [x, b_0])$ 的 Lipschitz 连续性与介值定理. (3)小问通过将 $|b_i - b_j|$ "翻译"到 $|a_i - a_j|$ 即可. 本题的证明方法属于徐凯, 有趣的一点是我们看到了集合 E 的测度被有限个点 b_i 很好地控制住了.

很自然, 我们可以将问题延伸到高维的情况. Pólya 证明了以下结论:

定理 1 (Pólya [24], 1928)**.** 设 $P(X)$ 是一个 d 次首一复系数多项式, 其中 $d \geqslant 1$. 设 D 是复平面上的一个圆盘. 则我们有

$$\operatorname{Area}(P^{-1}(D)) \leqslant \pi \left(\frac{\operatorname{Area}(D)}{\pi}\right)^{1/d}.$$

并且, 以上的不等式取等当且仅当存在复数 b, c 使得 $P(X) = (X-b)^d + c$ 且圆盘 D 的中心是 c.

Crane 证明了我们可以将上述定理中的圆盘换成任何一个复平面上的 Lebesgue 可测集:

定理 2 (Crane [7], 2004)**.** 设 $P(X)$ 是一个 d 次首一复系数多项式, 其中 $d \geqslant 1$. 设 K 是复平面上的一个 *Lebesgue* 可测集. 则我们有

$$\operatorname{Area}(P^{-1}(K)) \leqslant \pi \left(\frac{\operatorname{Area}(K)}{\pi}\right)^{1/d}.$$

更多相关问题与已知结论可以查看 Bogachev 的综述文章[6](2016).

$\square$

题 2 设 $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 若 A 中任何两个不同的数互不整除彼此, 则称 A 是一个本原集. 本题的目标是证明 Erdös [8](1935) 的一个结果: 存在常数 $C_0 > 0$ 使得对任何本原集 A, 均有

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a \ln a} \leqslant C_0.$$

(1) 只用对有限的本原集 A 证明即可. 设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, 设 a_k 的最大素因子为 p_k $(k = 1, \ldots, n)$. 重排, 可不妨设 $p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_n$. 证明: 对任何正整数 N, 集合 $\{1, 2, \ldots, N\}$ 中被 a_k 整除, 但不被任何 a_i $(i < k)$ 整除的数的个数

$$\geqslant \frac{N}{a_k} \prod_{p \leqslant p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - 2^{\pi(p_k)}.$$

(2) 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \prod_{p \leqslant p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leqslant 1.$$

(3) 证明弱版 Mertens 定理: 存在常数 $c_0 > 0$ 使得对任何整数 $x \geqslant 2$ 有

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{c_0}{\ln x}.$$

由此完成本题目标.

评讲. (1)小问利用容斥原理即可. 需要注意的是(1)中我们用到了 A 是本原集. 让我们下面啰嗦一点展示下细节. 记集合

$$A_k := \left\{ m \in \mathbb{Z} \cap [1, N/a_k] \;\middle|\; \gcd\left(m, \prod_{p \leqslant p_k} p\right) = 1 \right\}.$$

设 $q_1, q_2, \ldots, q_{\pi(p_k)}$ 是所有不超过 p_k 的素数. 则由容斥原理,

$$\begin{aligned}
|A_k| &= \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,\pi(p_k)\}} (-1)^{|J|} \left\lfloor \frac{\lfloor N/a_k \rfloor}{\prod_{j \in J} q_j} \right\rfloor \\
&= \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,\pi(p_k)\}} (-1)^{|J|} \left\lfloor \frac{N}{a_k \prod_{j \in J} q_j} \right\rfloor \\
&= \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,\pi(p_k)\}} (-1)^{|J|} \frac{N}{a_k \prod_{j \in J} q_j} - \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,\pi(p_k)\}} (-1)^{|J|} \left\{ \frac{N}{a_k \prod_{j \in J} q_j} \right\} \\
&\geqslant \frac{N}{a_k} \prod_{j=1}^{\pi(p_k)} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) - \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,\pi(p_k)\}} 1 \\
&= \frac{N}{a_k} \prod_{p \leqslant p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - 2^{\pi(p_k)}.
\end{aligned}$$

记

$$B_k := \left\{ m \in \mathbb{Z} \cap [1, N] \;\middle|\; m \text{ 被 } a_k \text{ 整除, 但 } m \text{ 不被 } a_1, a_2 \ldots, a_{k-1} \text{中任何一个数整除} \right\}.$$

则有

$$a_k A_k \subset B_k. \tag{1}$$

这是因为, 对任何 $m \in A_k$ 和任何 $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, 由于 a_i 的最大素因子 $= p_i \leqslant p_k$, 而 m 与 $\prod_{p \leqslant p_k} p$ 互素, 故 $\gcd(m, a_i) = 1$. 如果 $a_i \mid m a_k$, 则由 $\gcd(m, a_i) = 1$ 可推出 $a_i \mid a_k$, 与 A 是本原集矛盾. 故 a_i 不整除 $m a_k$, 又显然 $1 \leqslant m a_k \leqslant N$, 所以 (1) 式成立. 从 (1) 式推出

$$|B_k| \geqslant |A_k| \geqslant \frac{N}{a_k} \prod_{p \leqslant p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - 2^{\pi(p_k)},$$

此即(1)小问所求的不等式.

(2)小问通过考虑计数, 并令 $N \to +\infty$ 即可得.

(3)小问是弱版的 Mertens 定理, 它有一个很初等的证明, 梗概如下: 由

$$\ln n! = \sum_{p \leqslant n} \alpha_p \ln p, \quad \alpha_p = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \geqslant \frac{n}{p} - 1,$$

得
$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p}\leqslant\frac{1}{n}\left(\ln n!+\sum_{p\leqslant n}\ln p\right).$$
易知 $\ln n! = n\ln n + O(n)$, 而更熟悉的 Chebyshev 估计告诉我们
$$\sum_{p\leqslant n}\ln p = O(n).$$
所以
$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p}\leqslant \ln n + O(1).$$
利用上式与 Abel 求和变换可得
$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\leqslant \ln\ln n + O(1),$$
这便可以推出(3)小问. (另一方面, 从 $\prod_p(1+p^{-1}+p^{-2}+\cdots)\geqslant\sum_{m=1}^n m^{-1}$ 易推出 $\sum_{p\leqslant n}p^{-1}\geqslant \ln\ln n + O(1)$. 所以 $\sum_{p\leqslant n}p^{-1}=\ln\ln n+O(1)$ 的证明是非常初等的.)

Mertens 定理常见的一个版本是:

定理 3 (Mertens [22], 1874). *当实数 $x\to+\infty$ 时, 我们有以下的渐近估计:*
$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x + c_0 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$
其中常数
$$c_0=\gamma+\sum_p\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)=0.261497\ldots.$$
(而 $\gamma = 0.577215\ldots$ 是 Euler 常数.)

□

题 3　设 p 是一个素数. 我们将满足
$$m!\equiv n!\pmod p,\quad 0\leqslant m,n<p$$
的整数对 (m,n) 的总数记作 N_p. 本题的目标是证明 Garaev, Luca, Shparlinski 三人的一个结果 [10](2005) : 存在常数 $C>0$ 使得 $N_p<Cp^{3/2}$ 对任何素数 p 成立.

(1) 证明: $N_p=\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}|S_a|^2$, 其中 $S_a:=\sum_{n=0}^{p-1}e^{2\pi i a n!/p}$.

(2) 证明: 对任何整数 $k \geqslant 0$, 有 $S_a = \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i a(n+k)!/p} + O(k)$. 进而证明, 对任何整数 $K \geqslant 1$, 有

$$S_a = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i a(n+k)!/p} + O(K).$$

(3) 证明:

$$\sum_{a=0}^{p-1} |S_a|^2 \ll \frac{p}{K^2}\sum_{k_1=0}^{K-1}\sum_{k_2=0}^{K-1}\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{a=0}^{p-1} e^{2\pi i a n! F_{k_1,k_2}(n)/p} + pK^2,$$

其中 F_{k_1,k_2} 为多项式

$$F_{k_1,k_2}(X) = (X+1)(X+2)\cdots(X+k_1) - (X+1)(X+2)\cdots(X+k_2)\,.$$

(4) 证明: $N_p \ll p^{3/2}$. (提示: 当 $k_1 \neq k_2$ 时关于 n 的同余方程 $F_{k_1,k_2}(n) \equiv 0 \pmod p$ 在模 p 意义下至多有 K 个解, 从 (3) 小问推出 $N_p \ll p^2/K + pK + K^2$.)

评讲. 本题每个小问都很容易. 指数和这个方法在本题中只是一个载体, 整个证法最本质的一步是多项式 F_{k_1,k_2} 的出现, 使得我们可以利用 Lagrange 定理推出对 N_p 非平凡的估计.

关于 $n! \pmod p$ 的余数分布, 有一些(很弱的)部分结果. 记集合

$$V_p := \left\{ n! \bmod p \;\middle|\; n = 0, 1, \ldots, p-1 \right\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

基于概率上的考量, 人们猜测

猜想 4 (见 [12])**.** *当素数 $p \to +\infty$ 时, 有以下渐近估计*

$$|V_p| \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) p.$$

关于 $|V_p|$, 目前已知的最好的上下界估计离猜想都还很遥远:

定理 5 (Grebennikov, Sagdeev, Semchankau, Vasilevskii [11], 2024)**.** *当素数 $p \to +\infty$ 时, 有*

$$|V_p| > \left(\sqrt{2} - o(1)\right)\sqrt{p}.$$

定理 6 (Banks, Luca, Shparlinski, Stichtenoth [2], 2005)**.** *存在无穷多个素数 p, 使得*

$$p - |V_p| \gg \frac{\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}.$$

定理 7 (Klurman, Munsch [13], 2017)**.** *如果广义 Riemann 猜想成立, 则存在无穷多个素数 p 使得*

$$p - |V_p| \gg \frac{p^{1/4}}{\ln p}.$$

$\square$

题 4 对正整数 n, 我们用 $f_5(n)$ 表示 5 个 n 次单位根的非零和的绝对值的最小可能值, 即

$$f_5(n) := \min\left\{\left|\sum_{k=1}^{5} z_k\right| : z_k \in \mathbb{C},\ z_k^n = 1\ (k = 1, 2, \ldots, 5),\ \sum_{k=1}^{5} z_k \neq 0\right\}.$$

本题的目标是证明 Barber [3](2023) 的一个结果: 存在常数 $C > 0$ 使得 $f_5(n) < Cn^{-4/3}$ 对所有充分大的正整数 n 成立.

(1) 对于实数 x, 记 $e(x) = e^{2\pi ix}$. 对整数 a, b, 记 $z_5(a, b) = 1 + e(1/5 + a/5n) + e(-1/5 - a/5n) + e(2/5 + b/5n) + e(-2/5 - b/5n)$. 证明: 存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\left|z_5(a, b) + \frac{(4\pi\sin(\pi/5))(a\phi + b)}{5n}\right| \leqslant C_1\frac{a^2 + b^2}{n^2},$$

其中 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

(2) 证明: 存在常数 $C_2 > 1$ 使得对于任何 $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 存在两列整数数列 $\{a_{j,r}\}_{j\geqslant 1}$ 和 $\{b_{j,r}\}_{j\geqslant 1}$ 使得

$$\begin{aligned}
&a_{j,r} \equiv r \pmod 5, \quad b_{j,r} \equiv 2r \pmod 5,\\
&\phi^{20j}/C_2 < |a_{j,r}| < C_2\phi^{20j}, \quad \phi^{20j}/C_2 < |b_{j,r}| < C_2\phi^{20j},\\
&1/\left(C_2\,|a_{j,r}|\right) < |a_{j,r}\phi + b_{j,r}| < C_2/\,|a_{j,r}|\,.
\end{aligned}$$

(提示: 例如对于 $r = 1$, 可以取 $a_{j,1} = F_{20j+1} + 2F_{20j+20}$, $b_{j,1} = -F_{20j+2} - 2F_{20j+21}$.)

(3) 证明: $f_5(n) \ll n^{-4/3}$ 对任何充分大的正整数 n 成立.

注记: Barber [3](2023) 还证明了存在无穷多个正整数 n 使得 $f_5(n) \ll n^{-7/3}$.

评讲. 记 $f_k(n)$ 为 k 个 n 次单位根的非零和的绝对值的最小可能值. 当 $k \leqslant 4$ 时, 自由度较小, 我们可以精确地表示出 $f_k(n)$. 对于一般的 k 与 n, 我们对 $f_k(n)$ 所知不多. 一个平凡的下界估计是 $f_k(n) \geqslant k^{1-\varphi(n)}$. 对于上界估计, 当 k 与 n 均为偶数时, 有:

定理 8 (Myerson [23], 1986)**.** *固定正偶数 k. 则存在常数 $C_k > 0$ 使得对任何正偶数 n, 有*

$$f_k(n) \leqslant C_k\varphi(n)^{-k/4}.$$

特别地, 当 n 为偶数且 $n \to +\infty$ 时有

$$f_k(n) < n^{-k/4+o(1)}.$$

本题关心 $f_5(n)$. Barber 的证明想法很简单: 对正五边形作一个很小的扰动. $\square$

题 5 本题的目标是证明: 与平面上 $n \geqslant 2$ 个两两不同的定点的距离之和为定值的动点轨迹不可能是一个圆. 经过简单的处理, 该目标等价于证明以下结论: 设 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ 给定, 设 $C > 0$ 是一个常数. 若满足 $\sum_{j=1}^{n} |z - z_j| = C$ 的全体复数 z 构成的集合正好是单位圆 $|z| = 1$, 则必有 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$.

(1) 证明: 对任何 $r_0 > 0$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, 以及任何正整数 m, 积分

$$\int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0} \right| \cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

的正负性与 $\cos(2m\theta_0)$ 的正负性正好相反.

(2) 证明: 对任何 n 个实数 $\theta_1, \ldots, \theta_n$, 存在正整数 m 使得 $\cos(2m\theta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 的正负性相同.

(3) 完成本题目标.

评讲. (1)小问可以把被积函数展开再逐项积分来做(这种做法 $r_0 = 1$ 时逐项积分的合理性不是太显然, 为方便, $r_0 = 1$ 的情况另外单独处理). 注意到被积函数以 2π 为周期, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0} \right| \cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
=\ &\int_0^{2\pi} \left| e^{i(\theta+\theta_0)} - r_0 e^{i\theta_0} \right| \cos(2m(\theta+\theta_0))\,\mathrm{d}\theta \\
=\ &\cos(2m\theta_0) \cdot \int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 \right| \cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta \ - \ \sin(2m\theta_0) \cdot \int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 \right| \sin(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta. \qquad (2)
\end{aligned}$$

我们断言, 对任何 $r_0 \geqslant 0$ 有

$$\int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 \right| \sin(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} - r_0 \right| \cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta \leqslant 0, \quad \text{且仅当 } r_0 = 0 \text{ 时取等.} \tag{4}$$

事实上, 对于 (3) 式, 被积函数是奇函数, 故它在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的积分是 0. 对于 (4) 式, 先考虑 $r_0\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 的情况. 此时 $0<2r_0/(r_0^2+1)<1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-r_0\right|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
=&\sqrt{r_0^2+1}\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{2r_0}{r_0^2+1}\cos\theta}\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
=&\sqrt{r_0^2+1}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{2r_0}{r_0^2+1}\cos\theta\right)^k\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

由于 $0<2r_0/(r_0^2+1)<1$, 上式最右端被积级数在区间 $[0,2\pi]$ 上是一致收敛的, 我们可以逐项积分, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-r_0\right|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
=&\sqrt{r_0^2+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}\left(\frac{2r_0}{r_0^2+1}\right)^k\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
=&-\sqrt{r_0^2+1}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}\left(\frac{2r_0}{r_0^2+1}\right)^k\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

注意到

$$\cos^k\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^k=\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{i(k-2j)\theta},\quad \cos(2m\theta)=\frac{e^{i2m\theta}+e^{-i2m\theta}}{2},$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i\ell\theta}\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & \text{当 } \ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ 2\pi, & \text{当 } \ell=0,\end{cases}$$

我们推出当 $r_0\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-r_0\right|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
=&-\sqrt{r_0^2+1}\sum_{\substack{k=2m\\ k\text{ 偶}}}^{+\infty}\underbrace{\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}\left(\frac{2r_0}{r_0^2+1}\right)^k\cdot\frac{2\pi}{2^k}\binom{k}{k/2-m}}_{>0}\\
&<0.
\end{aligned}$$

当 $r_0=0$ 时显然 $\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-r_0\right|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$. 当 $r_0=1$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-1|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\=&\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta\\=&\frac{2}{2m+1/2}-\frac{2}{2m-1/2}\\<&\ 0.\end{aligned}$$

综上, 式 (4) 成立.

将 (3)(4) 两式代入 (2) 式, 我们得到

$$\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-r_0e^{i\theta_0}\right|\cos(2m\theta)\,\mathrm{d}\theta=I(m,r_0)\cdot\cos(2m\theta_0),$$

其中 $I(m,r_0)$ 是被 m,r_0 决定的常数, 且

$$I(m,r_0)\begin{cases}<0, & \text{当 } r_0>0,\\ =0, & \text{当 } r_0=0.\end{cases}$$

(2)小问是典型的抽屉原理的应用: 存在正整数 m 使得 $\cos(2m\theta_j)$ $(j=1,2,\dots,n)$ 都充分接近 1. (3)小问从(1)(2)小问即得. □

题 6 我们知道, 一个顶点数为 n 的简单图如果不含圈, 则它的边数至多为 $n-1$. 现在我们考虑这样的问题: 一个顶点数为 n 的简单图, 如果它不含两个等长的圈, 则它的边数的最大值是多少? 将这个最大值记作 $f(n)$. 在罗马尼亚大师杯 (2019) 中, 一道题目是证明当 $n\to+\infty$ 时有 $f(n)\leqslant n+o(n)$. 事实上, 有一个简洁的概率方法能够证明 $f(n)\leqslant n+2\sqrt{n}+1$. 本题的目标是证明 Boros, Caro, Füredi, Yuster [5](2001) 四人的一个结果: 对充分大的 n, 我们有 $f(n)<n+1.98\sqrt{n}$.

设 G 是一个顶点数为 n, 边数为 E 的简单图, 并且 G 不含两个等长的圈. 我们的目标是证明若 n 充分大, 则必有 $E<n+1.98\sqrt{n}$.

(1) 证明: $E<2n$.

(2) 设 H 是一个图, 它的边数是 F. 设 $c_1,c_2,\dots,c_t$ 是 H 中的某些圈, 满足 $|c_1|\leqslant|c_2|\leqslant\cdots\leqslant|c_t|$. 记 $a\leqslant t$ 是最大的下标使得 $|c_1|+|c_2|+\cdots+|c_a|\leqslant F$. 证明: 我们可以选出不超过 $(t+a)/2$ 条 H 的边, 使得每个圈 $c_i(i=1,2,\dots,t)$ 至少有一条边被选中.

(3) 独立随机地以概率 p 选择 G 的每条边, 得到一个随机的边的集合 X. 设 $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ 是所有不与 X 相交的 G 中的圈构成的集合, 其中 $t = t(X)$, $|c_1| < |c_2| < \cdots < |c_t|$. 记 $a = a(X)$ 为最大的下标使得 $\sum_{j=1}^{a} |c_j| \leqslant E$. 证明:

$$E - \left(|X| + \frac{t(X) + a(X)}{2} \right) \leqslant n - 1.$$

(4) $\mathbb{E}(|X|) = pE$. 证明: $\mathbb{E}(t(X)) \leqslant \sum_{i=3}^{n} (1-p)^i$.

(5) 给定 n 个正实数 $y_1, y_2, \dots, y_n$. 假设存在一个下标 $\gamma < n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\gamma} i y_i \leqslant E < \sum_{i=1}^{\gamma+1} i y_i.$$

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是任意 n 个实数, 满足 $0 \leqslant x_i \leqslant y_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 以及 $x_1 + 2x_2 + \cdots + n x_n \leqslant E$. 证明: 一定有 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_{\gamma+1}$.

(6) 沿用 (2) 小问中的记号, 记 $A(X) = \{c_1, c_2, \dots, c_a\}$. 假设存在一个下标 $\gamma < n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{\gamma} i(1-p)^i \leqslant E < \sum_{i=1}^{\gamma+1} i(1-p)^i.$$

证明:

$$\mathbb{E}(a(X)) \leqslant \sum_{i=1}^{\gamma+1} (1-p)^i.$$

(提示: 取 $x_i = \mathbb{P}(G$ 有一条长为 i 的圈, 且此圈落在 $A(X)$ 中.)

(7) 不妨设 $E \geqslant n$. 取概率 $p = \alpha/\sqrt{E}$, 其中 $\alpha \in (0,1)$ 是一个待定常数. 证明: 当 n 充分大时, 上一小问中的 γ 存在. 设 $\gamma + 1 = \beta\sqrt{E}$, 证明当 $n \to +\infty$ 时, β 满足

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha^2} \exp(-\alpha\beta) = 1 + o(1).$$

(8) 证明:

$$\frac{E - n}{\sqrt{E}} < \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{\exp(-\alpha\beta)}{2\alpha} + o(1).$$

取 $\alpha = 0.80868$, 则 (7) 推出当 n 充分大时 $2.76419 < \beta < 2.76420$. 从 (8) 给出当 n 充分大时 $(E - n)/\sqrt{E} < 1.97914$, 这便推出 n 充分大时 $E < n + 1.98\sqrt{n}$.

评讲. Boros, Caro, Füredi, Yuster [5] 做法的关键是(2)小问这一步骤. 相较于 $E \leqslant n+2\sqrt{n}+1$ 的证明, (2)中引入的量 a 带来了一点节约. 本题中的结果是 $f(n)$ 目前已知的最佳上界. 关于 $f(n)$ 的下界估计, 容易证明 $f(n) > n + (\sqrt{2} - o(1))\sqrt{n}$. 已知的最佳下界是 Lai [14](2020):

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{f(n)-n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{2+\frac{40}{99}} = 1.550496\ldots.$$

这个下界估计来自于具体的构造. □

题 7 对任何一个有限图 G (可以不是简单图, 即允许自环与平行边), 记 $\tau = \tau(G)$ 表示最小的非负整数使得 G 能够去掉某 τ 个顶点(以及它们所连的边)之后不含圈. 记 $\nu = \nu(G)$ 是最大的非负整数使得 G 中存在 ν 个两两不交的圈("不交"指"无公共顶点"). 本题的目标是证明: 一方面, 对任何有限图 G, 均有

$$\nu \geqslant \frac{\tau}{4\ln(\tau+2)};$$

另一方面, 对任何正整数 τ_0, 存在有限图 G 使得 $\tau > \tau_0$ 且

$$\nu \leqslant \frac{3\tau}{\ln\tau}.$$

这是 Erdös 和 Pósa 的一个结果. 下面的证明方法属于 Voß (1968) 和 Simonovits (1967) (见 [20, §10]). 记 $n = n(G)$ 是 G 的顶点数. 记 $\delta = \delta(G)$, $\Delta = \Delta(G)$ 分别是图 G 中顶点的度数的最小值与最大值. 记 $g = g(G)$ 是 G 的最短圈长.

(1) 证明: 若 $\delta \geqslant 3$, 则

$$\tau \geqslant \frac{n+2}{\Delta+1}.$$

(提示: 设 G 去掉某 τ 元顶点子集 Z 之后不含圈, 对 $V \setminus Z$ 与 Z 之间的边数两头估.)

(2) 证明: 若 $\delta \geqslant 3$, 则

$$\tau \geqslant \frac{3}{4} \cdot 2^{\lfloor (g-1)/2 \rfloor}.$$

(提示: $n \geqslant 1 + \Delta + 2\Delta + \cdots + 2^{\lfloor (g-3)/2 \rfloor}\Delta$.)

(3) 证明: 对任何有限图 G 均有

$$\nu \geqslant \frac{\tau}{4\ln(\tau+2)}.$$

(提示: 对 n 归纳. 适当处理 G 中度数 < 3 的顶点, 得到图 G_1. 去掉 G_1 的一个最短圈得到 G_2. 对 G_2 用归纳假设.)

(4) 证明: 对任何正整数 $a \geqslant 2$, 存在 3-正则图(即 $\delta = \Delta = 3$, 允许自环与平行边) 使得 $g \geqslant a$.

(5) 证明: 对任何正整数 τ_0, 存在有限图 G 使得 $\tau > \tau_0$ 且

$$\nu \leqslant \frac{3\tau}{\ln \tau}.$$

(提示: 任给整数 $a \geqslant 2$. 考虑满足 $g \geqslant a$ 的所有 3-正则图中使得 n 最小的一个图 G. 证明 $n \leqslant 3 \cdot 2^g$.)

评讲. 即使我们只关心简单图, 这个解法在归纳跳步中会出现非简单图. 所以我们需要考虑一般的图. □

题 8 对任何复数 z, 以及任何四个正整数 $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$, 本题的目标是证明: $z^{n_1}, z^{n_2}, z^{n_3}, z^{n_4}$ 不可能依此顺序构成公差非零的等差数列. (换言之, 不可能有 $z^{n_4} - z^{n_3} = z^{n_3} - z^{n_2} = z^{n_2} - z^{n_1} \neq 0$.) 这是 Schinzel [26](1962) 的一个结果.

(1) 设 n, m 是整数, 满足 $n > m > 0$, $(n, m) \neq (7k, 2k)$, $(n, m) \neq (7k, 5k)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. 设 $P(X), Q(X)$ 是两个整系数多项式, 满足 $X^n - 2X^m + 1 = P(X)Q(X)$. 证明: 两个多项式 $P(X)$ 与 $Q(X)$ 至少有一个是回文多项式, 即

$$X^{\deg P} P(X^{-1}) = \pm P(X) \quad \text{或} \quad X^{\deg Q} Q(X^{-1}) = \pm Q(X).$$

(提示: 记 $R(X) = X^{\deg P} P(X^{-1}) \cdot Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, 则 $(X^n - 2X^m + 1)(X^n - 2X^{n-m} + 1) = R(X) \cdot X^{\deg R} R(X^{-1})$. 比较 X^n 的系数得 $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = 6$.)

(2) 设 n, m 是整数, 满足 $n > m > 0$, 记多项式

$$f_{n,m}(X) := \frac{X^n - 2X^m + 1}{X^{\gcd(n,m)} - 1}.$$

证明: 如果 $n \neq 2m$, $(n, m) \neq (7k, 2k)$, $(n, m) \neq (7k, 5k)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, 则 $f_{n,m}(X)$ 是不可约整系数多项式. 如果 $(n, m) = (7k, 2k)$ 或 $(7k, 5k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$,则 $f_{n,m}(X)$ 是两个不可约整系数多项式的乘积:

$$f_{7k,2k}(X) = (X^{3k} + X^{2k} - 1)(X^{3k} + X^k + 1), \quad f_{7k,5k}(X) = (X^{3k} + X^{2k} + 1)(X^{3k} - X^k - 1).$$

(3) 设 n, m, n', m' 是四个整数, 满足 $n > m > 0$, $n' > m' > 0$, $(n, m) \neq (n', m')$. 则

$$\gcd\Big(X^n - 2X^m + 1,\ X^{n'} - 2X^{m'} + 1\Big) = \begin{cases} X^{\gcd(m,n,n',m')} - 1, & \text{若 } (n, n') \neq (2m, 2m'), \\ \left(X^{\gcd(m,m')} - 1\right)^2, & \text{若 } (n, n') = (2m, 2m') \end{cases}.$$

(4) 完成本题目标.

评讲. 对于系数平方和很小的整系数多项式, 本题中使用的这种考虑回文多项式来研究不可约性的方法最初来自于 Ljunggren:

定理 9 (Ljunggren [19], 1960)**.** *考虑多项式 $f(x) = x^{n_1} + \varepsilon_1 x^{n_2} + \varepsilon_2 x^{n_3} + \varepsilon_3$, 其中整数 $n_1 > n_2 > n_3 > 0$, 系数 $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $(i = 1, 2, 3)$. 则我们有:*

(1) 如果 $f(x)$ 的根中没有单位根, 则 $f(x)$ 是不可约整系数多项式.

(2) 如果 $f(x)$ 的所有根里恰有 q 个单位根, 则这些单位根均为单根. 并且 $f(x)$ 可分解成两个整系数多项式的乘积, 其中一个多项式不可约, 而另一个多项式的次数为 q, 以所有这 q 个单位根为根.

□

题 9 设实数 μ 满足:

$$\mu > \mu_0 = \frac{2\ln(\sqrt{2}+1)+1}{2\ln(\sqrt{2}+1)-1} \approx 3.6221008325.$$

本题的目标是证明: 当正整数 q 充分大时, 有 $\|q\ln 2\| > q^{-\mu}$. 记 $d_n = [1, 2, \ldots, n]$ 为前 n 个正整数的最小公倍数. 熟知素数定理推出当 $n \to +\infty$ 时 $d_n = e^{n+o(n)}$.

(1) 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 记

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)^n (X^n(1-X)^n)$$

为 n 次 Legendre 多项式. 定义

$$I_n = \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

证明: 存在 $a_n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$d_n I_n = a_n \ln 2 - b_n,$$

并且当 $n \to +\infty$ 时

$$a_n = ((3+2\sqrt{2})e)^{n+o(n)}.$$

(2) 证明:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x,$$

并且当 $n \to +\infty$ 时

$$I_n = (3-2\sqrt{2})^{n+o(n)}.$$

(3) 设 $\mu=\mu_0+5\delta$, $\delta>0$. 证明: 当正整数 q 充分大时, 存在正整数 n_1, n_2 使得

$$a_{n_1}\in[q^{\mu_0+\delta},q^{\mu_0+2\delta}],\quad a_{n_2}\in[q^{\mu_0+3\delta},q^{\mu_0+4\delta}],$$

并且 $b_{n_1}/a_{n_1}\neq b_{n_2}/a_{n_2}$.

(4) 证明: 对充分大的正整数 q, 有 $\|q\ln 2\|>q^{-\mu}$. (提示: 假设 $|q\ln 2-p|\leqslant q^{-\mu}$, 则当 q 充分大时 $|pa_{n_i}-qb_{n_i}|\leqslant q|a_{n_i}\ln 2-b_{n_i}|+a_{n_i}|q\ln 2-p|<1$, $i=1,2$.)

注记: Marcovecchio [21](2009) 证明了本题里的 μ_0 可以改进到 2.57455391.

评讲. 对于无理数 α, 我们定义

$$\mu(\alpha):=\inf\left\{\mu>0\ \middle|\ \text{存在至多依赖于 }\alpha,\mu\text{ 的常数 }C_\mu>0\text{ 使得 }\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{C_\mu}{q^\mu},\ \forall(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}.\right\}$$

(约定 $\inf\varnothing=+\infty$.) 称 $\mu(\alpha)$ 为 α 的无理指数. 本题相当于证明了 $\mu(\ln 2)<4.622101$. 关于 $\mu(\ln 2)$, 目前已知的最好上界是 $\mu(\ln 2)<3.574554$ (Marcovecchio [21]). 关于无理指数, 我们有以下一些已知结果:

- 对任何无理数 α 均有 $\mu(\alpha)\geqslant 2$. (Dirichlet)
- 对几乎所有实数 α (相对于 Lebesgue 测度), 有 $\mu(\alpha)=2$.
- 对任何无理代数数 α, 有 $\mu(\alpha)=2$. (Roth [25], 1955)
- $\mu(e)=2$. (Euler)
- $\mu(\pi)<7.103206$. (Zeilberger, Zudilin [29], 2020)

□

题 10 1979年, Apéry [1] 证明了 $\zeta(3):=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-3}$ 是无理数. 本题的目标是给出 $\zeta(3)$ 是无理数的一种简短证明, 该方法属于 Beukers [4](1979). 记 $d_n=[1,2,\ldots,n]$ 为前 n 个正整数的最小公倍数. 熟知素数定理推出当 $n\to+\infty$ 时 $d_n=e^{n+o(n)}$.

(1) 设 $r,s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. 证明:

(1.1) 若 $r>s$, 则

$$d_r^3\int_{[0,1]^2}\frac{-\log(xy)}{1-xy}x^ry^s\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\in\mathbb{Z}.$$

(1.2) 若 $r=s$, 则

$$d_r^3\int_{[0,1]^2}\frac{-\log(xy)}{1-xy}x^ry^s\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\in\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z}.$$

(2) 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 记

$$P_n(X)=\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)^n(X^n(1-X)^n)$$

为 n 次 Legendre 多项式. 定义

$$I_n=\int_{[0,1]^2}\frac{-\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2.1) 证明: $d_n^3I_n\in\mathbb{Z}\zeta(3)+\mathbb{Z}$.

(2.2) 证明以下的等式链:

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-x)^n(1-w)^n\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w\quad(\text{提示: }w=(1-z)/(1-(1-xy)z))\\&=\int_{[0,1]^3}\frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nw^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

(3) 证明: 当 $n\to+\infty$ 时, $0<d_n^3I_n\leqslant((\sqrt{2}-1)^4e^3)^{n+o(n)}$, 并证明 $\zeta(3)$ 是无理数.

评讲. Riemann zeta 函数定义为

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^s},\quad \mathrm{Re}(s)>1.$$

人们对 Riemann zeta 函数的特殊值有兴趣. Euler 证明了

$$\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k},\quad\forall\,k\in\mathbb{N},$$

其中 B_{2k} 是第 $2k$ 个Bernoulli数, 由母函数

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}t^k$$

所定义. 特别地, 我们有 $\zeta(2k)\in\mathbb{Q}_{>0}\pi^{2k}$. 由于 Lindemann [18](1882) 证明了 π 是超越数, 故 $\zeta(2k)$ ($k\in\mathbb{N}$) 都是超越数. 而 $\zeta(2k+1)$ ($k\in\mathbb{N}$) 的算术性质我们知道得不多. 有以下一些部分结果:

- $\zeta(3)$ 是无理数. (Apéry [1], 1979)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ 中至少有一个无理数. (Zudilin [27], 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(35)$ 中至少有两个无理数. (Lai, Zhou [17], 2022)
- 对任何奇数 $s \geqslant 1$, 以下数中至少有一个无理数:

  $$\zeta(s+2), \zeta(s+4), \ldots, \zeta(8s-1).$$

  (Zudilin [28], 2002)
- 我们有

  $$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} (1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(75)) \geqslant 3.$$

  (Lai [16], 2025+)
- 当奇数 $s \to +\infty$ 时, 有

  $$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} (1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(s)) \geqslant 0.21 \cdot \sqrt{\frac{s}{\ln s}}.$$

  (Fischler [9], 2021+)
- 对任何充分大的奇数 s, 有

  $$\#\{\text{奇数 } k \in [3, s] \mid \zeta(k) \notin \mathbb{Q}\} \geqslant 1.284 \cdot \sqrt{\frac{s}{\ln s}}.$$

  (Lai [15], 2025+)

$\square$

参考文献

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Journées Arithmétiques (Luminy, 1978), Astérisque, vol. 61 (Société Mathématique de France, Paris, 1979), 11–13.

[2] W. D. Banks, F. Luca, I. E. Shparlinski, and H. Stichtenoth, *On the value set of $n!$ modulo a prime*, Turkish J. Math. 29 (2005), no. 2, p. 169–174.

[3] B. Barber, *Small sums of five roots of unity*, Bull. Lond. Math. Soc. 55 (2023), no. 4, 1890–1906.

[4] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 268–272.

[5] E. Boros, Y. Caro, Z. Füredi, and R. Yuster, *Covering non-uniform hypergraphs*, J. Combin. Theory Ser. B 82 (2001), no. 2, 270–284.

[6] V. I. Bogachev, *Distributions of polynomials on multidimensional and infinite-dimensional spaces with measures*, (Russian. Russian summary) Uspekhi Mat. Nauk 71 (2016), no. 4(430), 107–154; translation in Russian Math. Surveys 71 (2016), no. 4, 703–749.

[7] E. Crane, *The areas of polynomial images and pre-images*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), no. 6, 786–792.

[8] P. Erdös, *Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other*, J. London Math. Soc. 10 (1935), no. 2, 126–128.

[9] S. Fischler, *Linear independence of odd zeta values using Siegel's lemma*, arXiv:2109.10136 [math.NT], 2021.

[10] M. Z. Garaev, F. Luca, and I. E. Shparlinski, *Exponential sums and congruences with factorials*, J. Reine Angew. Math. 584 (2005), 29–44.

[11] A. Grebennikov, A. Sagdeev, A. Semchankau, and A. Vasilevskii, *On the sequence $n! \bmod p$*, Rev. Mat. Iberoam. 40 (2024), no. 2, 637–648.

[12] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, vol. 1, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, xviii+161 pages.

[13] O. Klurman and M. Munsch, *Distribution of factorials modulo p*, J. Théor. Nombres Bordeaux 29 (2017), no. 1, 169–177.

[14] C. Lai, *On the number of edges in some graphs*, Discrete Appl. Math. 283 (2020), 751–755.

[15] L. Lai, *A note on the number of irrational odd zeta values, II*, arXiv:2501.05321 [math.NT], 2025.

[16] L. Lai, *Small improvements on the Ball-Rivoal theorem and its p-adic variant*, arXiv:2407.14236v2 [math.NT], 2025.

[17] L. Lai and L. Zhou, *At least two of $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(35)$ are irrational*, Publ. Math. Debrecen 101/3–4 (2022), 353–372.

[18] F. Lindemann, *Über die Zalh* π, Math. Annalen 20 (1882), 213–225.

[19] W. Ljunggren, *On the irreducibility of certain trinomials and quadrinomials*, Math. Scand. 8 (1960), 65–70.

[20] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, Corrected reprint of the 1993 second edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2007. 642 pp.

[21] R. Marcovecchio, *The Rhin-Viola method for* $\log 2$, Acta Arith. 139 (2009), no. 2, 147–184.

[22] F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, J. reine angew. Math. 78 (1874), 46–62.

[23] G. Myerson, *Unsolved problems: how small can a sum of roots of unity be?*, Amer. Math. Monthly 93 (1986), no. 6, 457–459.

[24] G. Pólya, Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängedende Gebiete, S-B. Akad. Wiss, Berlin (1928), 228–232 & 280–282. Also in volume 1 of Pólya's Collected Papers, MIT press, (1974).

[25] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[26] A. Schinzel, *Solution d'un problème de K. Zarankiewicz sur les suites de puissances consécutives de nombres irrationnels*, Colloq. Math. 9 (1962), 291–296.

[27] W. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] 56 (2001), 149–150 [774–776].

[28] W. Zudilin, *Irrationality of values of the Riemann zeta function*, Izvestiya Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Izv. Math.] 66 (2002), 49–102 [489–542].

[29] D. Zeilberger and W. Zudilin, *The irrationality measure of* π *is at most* $7.103205334137\ldots$, Mosc. J. Comb. Number Theory 9 (2020), no. 4, 407–419.